תורת החוגים - תרגיל 5

שאלה 1. יהי M R-מודול ארטיני שונה מ-0.
הוכיחו כי לכל $N \leq M$ מתקיים $soc(M) \cap N \neq 0$.
הסיקו כי אם $soc(M) \oplus N = M$ אז $N = 0$.

שאלה 2. יהי R חוג פשוט למחצה ויהי $I \trianglelefteq R$. הוכיחו כי R/I פשוט למחצה.
(רמז: תרגיל 3 שאלה 3, או משפט ארטין-וודרברן.)

שאלה 3. יהיו R,S חוגים פשוטים למחצה. הוכיחו כי $R \times S$ פשוט למחצה.

שאלה 4. תהי G חבורה סופית ויהי F שדה.
בהרצאה הגדרנו כפל על FG ע"י $\left(\sum_{g\in G} \alpha_g g\right) \cdot \left(\sum_{h \in G} \beta_h h\right) = \sum_{k \in G} \left(\sum_{g \in G} \alpha_g \beta_{g^{-1}k}\right) k$.

א. הוכיחו כי הכפל אסוציאטיבי.

ב. הוכיחו כי אם G חבורה אבלית אז FG חוג חילופי.

שאלה 5. יהי F שדה. נגדיר

$$V = \{(x,y,z) \in F^3 : x+y+z=0\}$$

ונהפוך את V להצגה של החבורה S_3 ע"י הגדרת הפעולה

$$\sigma \cdot (x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, x_{\sigma^{-1}(3)})$$

א. בדקו כי V באמת הצגה של S_3.

ב. נניח כי $charF \neq 3$. הוכיחו כי V הצגה אי פריקה.

ג. נניח כי $charF = 3$. הוכיחו כי V הצגה פריקה, כלומר, יש תת-הצגה $0 \neq U \subsetneq V$.

שאלה 6. יהי R חוג. איבר $e\in R$ נקרא אידמפוטנט אם $e^2=e$

(למשל $e=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ בחוג $M_2(\mathbb{C})$).

(א) הוכיחו כי אם $e\in R$ אידמפוטנט אז גם $1-e$ אידמפוטנט ו- $R=eR\oplus(1-e)R$

(רמז: $(1-e)e=e(1-e)=0$. אם $x\in eR$ אז $ex=e$ [מדוע?].)

(ב) יהיו $A,B\le R_R$ אידיאלים ימניים כך ש- $A\oplus B=R$.

(נכתוב $1=a+b$ עם $a\in A$ ו- $b\in B$. הוכיחו כי $a^2=a$, $b^2=b$,

$ab=ba=0$, $A=aR$ ו- $B=bR$.

(רמז: $ab\in A$ ו- $ba\in B$. מהו $(a+b)a$? $(a+b)b$?)

(ג) הוכיחו כי R פשוט למחצה $\iff$ כל אידיאל ימני של R נוצר ע"י אידמפוטנט.